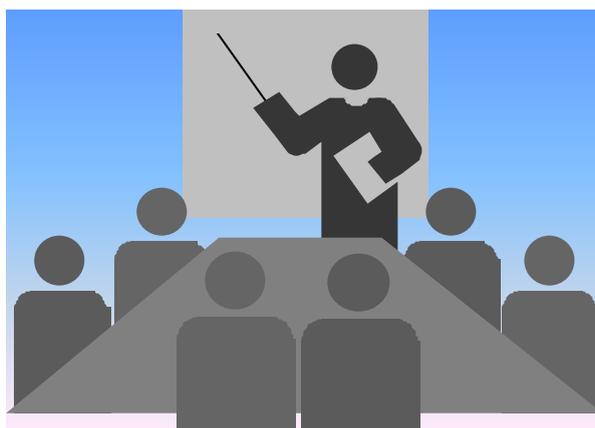


# La Parabola



**GRUPPO**

*Sacco Vittoria*

*Monforte Nicola*

*Tartaglione Antonio*

*Perone Elena*

*Fiorini Stefania*

*Pennace Sandra*

## **Unità Didattica: la Parabola**

Premessa

L'unità didattica in esame è adatta ad una classe terza di liceo scientifico e viene inserita nello studio delle coniche. Essa viene introdotta dopo lo studio della circonferenza e prima dello studio dell'ellisse e dell'iperbole. Lo studio della parabola consente di analizzare un luogo geometrico che trova applicazione anche in altri campi.

### **Prerequisiti**

- Concetto di piano cartesiano e di coordinate cartesiane
- Risoluzione di sistemi di equazioni di primo e secondo grado
- Concetto di funzione
- Traslazione del sistema di riferimento
- Conoscenza della retta e sua rappresentazione nel piano cartesiano
- Saper utilizzare la retta per risolvere esercizi e problemi
- Conoscenza della circonferenza nel piano cartesiano
- Saper utilizzare la circonferenza per risolvere esercizi e problemi

### **Obiettivi generali**

- Acquisire la capacità di tradurre un problema in forma algebrica
- Assimilare il concetto di "luogo geometrico di punti"
- Saper riconoscere, interpretare e costruire relazioni e funzioni quadratiche
- Sviluppare l'intuizione geometrica nel piano
- Saper analizzare e di conseguenza dedurre il metodo più appropriato per risolvere un problema
- Saper argomentare i passaggi utilizzati per la risoluzione di un problema

### **Obiettivi cognitivi**

- Saper definire la parabola come luogo geometrico di punti del piano
- Saper riconoscere l'equazione di una parabola
- Saper distinguere parabole particolari
- Saper riconoscere l'equazione di un fascio di parabole

### **Obiettivi Operativi**

- Saper rappresentare graficamente la parabola
- Saper determinare l'equazione della parabola assegnate tre condizioni
- Saper determinare gli elementi caratterizzanti una parabola ( fuoco, vertice, asse di simmetria, direttrice)
- Saper stabilire le posizioni reciproche tra parabola e retta
- Saper determinare i punti di intersezione tra una parabola ed una retta e tra due parabole
- Saper trovare l'equazione delle rette tangenti alle parabole condotte da un punto esterno e da un punto appartenente alla parabola stessa
- Saper determinare l'equazione di un fascio di parabole
- Saper determinare l'equazione delle parabole di un fascio soddisfacenti condizioni assegnate
- Saper risolvere esercizi e problemi di geometria analitica tra rette e parabole e tra rette circonferenze e parabole.

## **Contenuti**

- La parabola come luogo geometrico: equazione cartesiana canonica
- Parabole particolari e sue applicazioni
- Parabole con asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse e sue applicazioni
- Determinazione dell'equazione della parabola assegnate tre condizioni e sue applicazioni
- Determinazione delle rette tangenti ad una parabola condotte da un punto assegnato
- Fasci di parabole e sue applicazioni
- Esercitazione di laboratorio con Cabri - Geometre
- Problemi di riepilogo

## **METODOLOGIA**

Si inizia l'argomento proponendo una scheda stimolo (scheda n°1) preparata dal docente. Lo scopo è quello di sollecitare la curiosità dei ragazzi e determinare la parabola come uno dei diversi tipi di curve che si ottengono sezionando una figura data con un piano. Prendendo spunto dalle varie situazioni messe in evidenza dai ragazzi nella scheda, si apre una discussione guidata dal docente, al fine di sistematizzare opportunamente le nozioni apprese come scoperta. Si dà quindi la definizione di superficie conica indefinita a due falde, specificando l'asse, la generatrice, la semiapertura e il vertice. Si distinguono due casi: a) piano secante non passante per il vertice, caso in cui al variare dell'ampiezza dell'angolo formato dall'asse della superficie conica con il piano secante, si ottengono una circonferenza, un'ellisse, una parabola, un'iperbole, curve a cui si dà il nome di coniche non degeneri; b) piano passante per il vertice, circostanza in cui si ottiene il vertice stesso, oppure due rette distinte o coincidenti: in tal caso si parlerà di coniche degeneri. Si chiederà a questo punto agli allievi di portare semplici esempi di coniche tratte dalla vita reale. Si approfitta di tale discussione per dare qualche cenno storico e per stabilire qualche collegamento interdisciplinare, facendo qualche breve osservazione sulla classificazione delle coniche fatta da Apollonio (III sec. A.C.), sulla descrizione della traiettoria del moto parabolico introdotta da Galilei, sulle orbite ellittiche, affrontate da Keplero. Si procede affrontando l'argomento da un punto di vista analitico, in particolare considerando la parabola come luogo geometrico. Si comincia col trattare la parabola e se ne determina, considerando la proprietà che caratterizza i suoi punti, l'equazione canonica. Si sottolinea, inoltre, che l'equazione della parabola è di secondo grado in  $x$  o  $y$  che non possiede il termine simmetrico  $xy$ , compaiono tre parametri dipendenti dalle coordinate del fuoco e dall'equazione della direttrice e dall'asse di simmetria. Si sottolinea, che assegnate tre condizioni algebriche indipendenti, si ottiene univocamente una parabola. Si procede invitando gli studenti a tradurre le diverse condizioni geometriche nelle relative condizioni algebriche: passaggio per un punto, conoscenza del fuoco, della direttrice, dell'asse di simmetria e così via, al fine di ottenere l'equazione della parabola. Si conclude questa fase, sistematizzando il tutto. Infine si ritiene opportuno utilizzare un software

didattico (Cabri Geomètre II ) per la costruzione della parabola. A questo punto si rende necessaria una verifica formativa, mediante una scheda di lavoro (scheda n.2).

Tale scheda è divisa in tre parti: la prima consta di un test a risposta multipla avente lo scopo di verificare la conoscenza dei contenuti; la seconda consta di semplici esercizi, proposti sotto forma di test a risposta multipla, per valutare la comprensione; la terza di esercizi di consolidamento e risoluzione di problemi per verificare l'applicazione.

Dall'esito della verifica è opportuno, qualora non sono stati raggiunti gli obiettivi minimi un lavoro di recupero. Successivamente, la rimanente parte delle lezioni sarà dedicata allo studio delle posizioni reciproche tra parabola e retta. L'ultimo argomento è quello dei fasci di parabole.

Gli argomenti affrontati nell'ultimo periodo consentiranno di risolvere esercizi e problemi di difficoltà crescente. E' necessario a questo punto sistematizzare tutti gli argomenti affrontati allo scopo di una verifica sommativa.

<b>N. Lez.</b>	<b>Tempi</b>	<b>Contenuti</b>	<b>Metodologia</b>	<b>Strumenti</b>
<b>1</b>	10 min 20 min 30 min	Scheda stimolo Discussione e introduzione delle coniche Definizione della parabola come luogo geometrico e determinazione dell'equazione del tipo $y=ax^2+bx+c$	Sapere come scoperta Discussione partecipata Lezione frontale	Fotocopie Lavagna Libro di testo, lavagna
<b>2</b>	20 min 20 min 20 min	Rappresentazione grafica della parabola nota la sua equazione Parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$ in posizioni particolari Esercizi applicativi	Lezione frontale Lezione frontale Esercitazione alla lavagna	Libro di testo Libro di testo Lavagna
<b>3</b>	30 min 30 min	Parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x: $x=ay^2+by+c$ Esercizi applicativi	Lezione frontale Esercitazione alla lavagna	Libro di testo Lavagna
<b>4</b>	30 min 30 min	Sistematizzazione Verifiche orali	Lezione dialogata	Lavagna, lavagna luminosa e lucidi
<b>5</b>	60 min	Attività in laboratorio d'informatica: uso del Cabri	Lezione frontale e partecipata	Personal Computer, schede di lavoro
<b>6</b>	20 min 20 min 20 min	Determinare l'equazione della parabola assegnati tre punti Equazione della parabola assegnato il vertice ed un suo punto Esercizi applicativi	Lezione frontale Lezione frontale Lezione frontale	Libro di testo e lavagna
<b>7</b>	15 min 15 min	Equazione della parabola assegnato il fuoco ed un suo punto Equazione della parabola assegnati il vertice e la direttrice	Lezione frontale Lezione frontale	Libro di testo e lavagna

	30 min	Esercizi applicativi	Lezione frontale	
<b>8</b>	60 min	Verifica formativa	Test a risposta multipla Semplici esercizi	Fotocopie
<b>9</b>	60 min	Recupero ed approfondimento	Lezione frontale e dialogata	Lavagna e libro di testo
<b>10</b>	30 min	Posizione reciproca tra retta e parabola, retta tangente ad una parabola per un punto	Lezione frontale	Lavagna e libro di testo
	30 min	Esercizi	Lezione frontale	
<b>11</b>	60 min	Determinazione del fascio di parabole a partire dalle generatrici	Lezione frontale	Lavagna
<b>12</b>	60 min	Determinazione del fascio di parabole assegnati i punti base	Lezione frontale	Lavagna
<b>13</b>	30 min	Esercizi sui fasci di parabole	Lezione frontale	Lavagna
	30 min	Esercizi di riepilogo		
<b>14</b>	60 min	Sistematizzazione. Recupero	Lezione frontale e dialogata	Lavagna luminosa e lucidi
<b>15</b>	120 min	Verifica sommativa	Prove oggettive	Fotocopie

## SCHEDA N.1

Sezionando una superficie cava con un piano si ottengono delle figure geometriche.

Prova ad associare ad ogni sezione del primo gruppo una figura geometrica del secondo.

### I gruppo

### II gruppo

N.D.

1 →	...
2 →	...
3 →	...
4 →	...
5 →	...
6 →	...

### **Test di verifica** (conoscenza)

Quesiti a risposta multipla: barrare una casella osservando che una sola delle risposte riportate è quella esatta.

1. Fra le seguenti equazioni individua quella che rappresenta una parabola:

- a.  $3x^2+2x\cdot y+y=0$ ;
- b.  $x^2-3x+1-y^2=0$ ;
- c.  $x^2-5x+y=0$ ;
- d.  $y+x+8=0$ .

2. Una parabola passante per l'origine è del tipo:

- a.  $3x^2-4y+3=0$ ;
- b.  $x^2-y+2=0$ ;
- c.  $y+3x-y^2=0$ ;
- d.  $x-y^2+3=0$ .

3. Una parabola con vertice nell'origine è del tipo:

- a.  $y^2-x=0$ ;
- b.  $2y^2-5x+y=0$ ;
- c.  $x^2-3y+7x+2=0$ ;
- d.  $5x^2+7y-3=0$ .

4. Quali delle seguenti condizioni sono necessarie per determinare l'equazione della parabola:

- a. passaggio per quattro punti;
- b. assegnati direttrice, vertice e fuoco;
- c. assegnati due punti e l'asse di simmetria;
- d. assegnati il vertice e l'asse di simmetria.

### **Griglia di correzione**

1) c; 2) c; 3) a; 4) d.

### **Griglia di misurazione**

$$P=(N-1) \cdot E-S$$

P= punteggio conseguito;

N= numero di possibili risposte;

E= numero di risposte esatte;

S= numero di risposte sbagliate.

**Test di verifica** (comprensione)

Quesiti a risposta multipla, barrare una casella osservando che una sola delle risposte riportate è quella esatta.

1. La parabola di equazione  $y=x^2+7x-6$  ha il vertice nel punto:

- a.  $(7/2; 123/4)$ ;
- b.  $(-7/2; -441/4)$ ;
- c.  $(1/7; -246/49)$ ;
- d.  $(7/2; 25/4)$ .

2. La direttrice della parabola di equazione  $x=1/2 \cdot y^2 - 2y + 1$  ha equazione:

- a.  $x=4$ ;
- b.  $x=-3/2$ ;
- c.  $x=1/2$ ;
- d.  $y=-3/2$ .

3. Determinare quale delle seguenti equazioni rappresenta una parabola con vertice nel punto  $V(2;0)$  e passa per il punto  $P(0;1)$ :

- a.  $y=(x-2)^2$ ;
- b.  $y=(x+2)^2$ ;
- c.  $y=(x-1) \cdot (x-2)$ ;
- d.  $y=(2-x)^2/4$ .

4. La parabola di equazione  $y^2=16x$  ha fuoco:

- a.  $F=(0;1/64)$ ;
- b.  $F=(1/64;0)$ ;
- c.  $F=(2;2)$ ;
- d.  $F=(1/64;1/64)$ .

### **Griglia di correzione**

1) d; 2) b; 3) c; 4) b.

### **Griglia di misurazione**

$$P=(N-1) \cdot E-S$$

P= punteggio conseguito;

N= numero di possibili risposte;

E= numero di risposte esatte;

S= numero di risposte sbagliate.

**Test di verifica** (applicazione)

1. Una parabola di equazione  $y=ax^2+bx+c$  passa per i punti  $A(1;0)$ ,  $B(3;10)$ ,  $C(0;-2)$ .  
Trovare l'equazione e costruire il diagramma.
  
2. Scrivere l'equazione della parabola del tipo  $x=ay^2+by+c$  passante per il punto  $A(0;6)$  ed avente il vertice nel punto  $V(-2;3)$ .  
Dare una rappresentazione grafica.

### Griglia di correzione

1.  $y=x^2+x-2$

2.  $x=2/9y^2-4/3y$

### Griglia di valutazione

<b>Descrittori</b>	<b>Punti</b>
Interpretazione dei dati	3
Impostazione del sistema	3
Risoluzione del sistema	3
Correttezza dei calcoli	2
Rappresentazione grafica	1
<i>Totale</i>	12

## **GRIGLIA DI MISURAZIONE**

La griglia si riferisce a tutta la verifica formativa.

Fasce di livelli

0-12	gravemente insufficiente
13-14	insufficiente
25-30	mediocre
31-36	sufficiente
37-42	discreto
43-54	buono
55-60	ottimo

## Verifica sommativa dell'unità didattica

### Problema n.1

Scrivere l'equazione della retta tangente alla parabola  $x = -y^2 + 3y$  nel suo punto di ordinata 2

### Problema n.2

Trovare la misura della corda intercettata dalla parabola  $y^2 = 3 - x$  sulla retta  $x = 2y$

### Problema n.3

Trovare l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse delle ordinate, passante per i punti

$$A\left(-1; \frac{3}{2}\right); B(0; -1); C\left(1; -\frac{5}{2}\right) .$$

Determinare le equazioni delle tangenti alla parabola trovata uscenti dal punto  $P(1; -7)$  e determinare le coordinate dei punti di contatto.

### Problema n.4

Dato il fascio di parabole di equazione:

$$y = (1 - k) \cdot x^2 - k \cdot x + 2k - 1$$

verificare che:

1. esiste un'unica retta appartenente al fascio;
2. per ogni valore di  $k$ , diverso da 1, l'equazione data è una parabola, con asse parallelo all'asse delle  $y$ , e passante per due punti fissi A e B, di cui si chiedono le coordinate;
3. esiste una particolare parabola del fascio che risulta tangente alla retta di equazione:  
 $y = 2x - 2$ , in un certo punto T, di cui si chiedono le coordinate.

### GRIGLIA DI CORREZIONE

- 1)  $x+y-4=0$ ;
- 2)  $4\sqrt{5}$ ;
- 3)  $y=1/2x^2-2x-1$ ;  $y=-4x-3$ ;  $y=2x-9$ ;  $(-2;5)$ ;  $(4; -1)$ ;
- 4)  $y=-x+1$ ;  $y=\frac{k}{2(1-k)}$ ,  $k \neq 1$  (asse);  $A(-2;3)$  e  $B(1;0)$ ;  $y=x^2-1$ ;  $T(1;0)$ .

### GRIGLIA DI VALUTAZIONE

<b>Descrittori</b>	<b>Punti</b>
Interpretazione dei dati	1
Individuazione e conoscenza delle formule necessarie alla risoluzione dei quesiti	2
Saper utilizzare le conoscenze possedute in base al proprio livello di comprensione dei contenuti e dell'analisi del testo	3
Scelta delle strategie con il minor numero di passaggi, per arrivare al risultato richiesto	2
Correttezza nei calcoli	1
Originalità nell'esposizione del procedimento risolutivo	1
<i>Totale</i>	10

### GRIGLIA DI MISURAZIONE

Fasce di livelli

0-3 gravemente insufficiente

4 insufficiente

5 mediocre

6 sufficiente

7 discreto

8 buono

9-10 ottimo